Una precisazione sulla lezione del 5/9/06

Teorema *L'insieme dei razionali* $\mathbf{Q}$ *è denso in* $\mathbf{R}$

Dimostrazione Siano $x \in \mathbf{R}$, e $y \in \mathbf{R}$ due numeri reali qualsiasi con $x < y$. Vogliamo far vedere che esiste un numero razionale $\frac{p}{q}$ (almeno uno ma in realtà infiniti) tale che $x < \frac{p}{q} < y$. Dalla proprietà di Archimede segue che esiste un valore intero n_0 tale che $y - x > 2(10)^{-n_0}$. Per chi fosse preoccupato dal fatto che nella proprietà di Archimede vi sia solo 10^{-n_0} basta fare nel seguente modo: $y - x > 10^{-n_0} > 2(10)^{-n_0-1}$ e quindi si prende $n_0 + 1$ anziché n_0. Sia $x = p, a_1 a_2 a_3 \ldots$ lo sviluppo decimale di x e definiamo: $x_1 = p, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n_0}$, $x_2 = p, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n_0} + (10)^{-n_0} \doteq p, a_1 a_2 a_3 \ldots (a_{n_0} + 1)$. Sappiamo che $x_1 \le x < x_2$. x_1 può essere uguale a x solamente se $a_j = 0$ per ogni $j = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ mentre x_2 può essere uguale a x solamente se $a_j = 9$ per ogni $j = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$; eventualità questa scartata dal fatto che in tal caso x_2 sarebbe periodico di periodo 9. $x_2 - x_1 = 10^{-n_0}$

Dal disegno appare evidente che la distanza fra y e x_2 è superiore a $(10)^{-n_0}$. Sia $z' = p, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n_0-1}(a_{n_0} + 1) \doteq p', a'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_{n_0-1} a'_{n_0}$. Se quindi ora consideriamo i seguenti numeri $z = p', a'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_{n_0-1} a'_{n_0} c_{n_0+1} c_{n_0+2} c_{n_0+3} \ldots$, qulsiasi sia la scelta dei numeri c_j $j = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, si ha $x < z < y$. Questo perché $\dfrac{c_{n_0+1}}{(10)^{n_0+1}} + \dfrac{c_{n_0+2}}{(10)^{n_0+2}} + \dfrac{c_{n_0+3}}{(10)^{n_0+3}} + \ldots < \dfrac{9}{(10)^{n_0+1}} + \dfrac{9}{(10)^{n_0+2}} + \dfrac{9}{(10)^{n_0+3}} \ldots = \dfrac{1}{(10)^{n_0}}$. La scelta dei c_j può essere fatta in modo che il numero sia periodico e quindi $z = \dfrac{p}{q}$. Dalla dimostrazione segue pure che i numeri irrazionali sono densi nei reali. Basta prendere i c_j in modod tale che il numero z non sia periodico.